Auswertung Weihnachtsrätsel 2020
Verallgemeinertes Rosinenproblem

309

Würdigung der Preisträger

- Jackpot an eine Einsendung aus der 9A – meinen ausdrücklichen Glückwunsch!
- 10/10 BE: an fünf Einsendungen vergeben
- insgesamt 14 Einsendungen

Würdigung des Problems

Das Problem war in seiner Gänze nicht einfach, denn:

- Die Rosinenzahlen in den Stücken sind abhängig voneinander und man kann kein einzelnes Stück betrachten.
- Die Mindestanzahl von fünf (statt einer) erschwert die Situation ebenfalls (siehe unten).

Einige richtige und falsche Ideen finden sich in diversen Internetforen; meine Recherche brachte allerdings keine vollständige exakte Lösung zu Tage.

Ansatz zur kompletten Lösung

Den ganzen Weg zur Lösung verrate ich nicht, denn dann kann ich solche Fragen nie mehr stellen und zugegebenerweise ist er nicht ganz so einfach. Man muss also wirklich etwas nachdenken und Mathe machen (keine Zahlenraterei wie sonst im Unterricht). Der Anfang gestaltet sich recht simpel, denn es gilt

$$P = \frac{\text{Anzahl der Möglichkeiten mit mind. 5 Rosinen pro Stück}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

Und die Anzahl aller Möglichkeiten, also 309 Rosinen irgendwie auf 20 Stücke zu verteilen, lautet

$$\begin{aligned}
20^{309} &= 10429624198832568761694441924656016184583518175569593032570391006944322547882839356589\\
&\ 94565120000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\\
&\ 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\\
&\ 00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\\
&\ 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\\
&\approx 1.043 \cdot 10^{402}
\end{aligned}$$

Der trickreiche Teil sind die Möglichkeiten mit mindestens fünf Rosinen pro Stück. Beim klassischen Rosinenproblem kann man leichter die Möglichkeiten des Gegenereignisses zählen (also es gibt ein leeres Stück). Das Gegenteil von "mindestens fünf" ist "höchstens vier" und schließt auch Konstellationen wie "drei leere Stücke, vier Stücke mit zwei Rosinen und ein Stück mit vier Rosinen" usw. mit ein. Und ich gestehe, ich musste eine kleine Weile überlegen und rechnen, um darauf zu kommen und zu überprüfen, dass es

$$\begin{aligned}
&1032848149735235687880913790357062043225982143028199018071632153941288659422385499053571267\\
&5050123754971154889024935965933525397952486516140060302068077988863184733662234450647844994\\
&5381095899360356549277927756838966750646910541375690385943485818944160028008187038104322037\\
&9321070317235104718551645010033150448207920211328302726771843005307163962152298314251251610\\
&8102185150197356118445173590097920000000\\
\approx\ &1.0328 \cdot 10^{402}
\end{aligned}$$

Möglichkeiten gibt, 309 Rosinen auf 20 Stücke so zu verteilen, dass sich in jedem Stück mindestens fünf Rosinen befinden, was einer Wahrscheinlichkeit von 99.03 % entspricht. Hat man lediglich 308 Rosinen zur Verfügung, findet man als gerundeten Bruch

$$P \approx \frac{5.1622 \cdot 10^{400}}{5.2148 \cdot 10^{400}} \approx 98.99\ \%$$

Ausprobieren

Das geht deutlich schneller: Man lässt einen Computer probeweise Stollen backen, was mit 15 Zeilen Programmcode kein Problem ist. Bäckt man für eine vorgegebene Anzahl von Rosinen eine Million Stollen und zählt dann aus, wie viele davon die Bedingung erfüllen, ist das Ergebnis zuverlässig. Mein Normal-PC benötigt für eine Million Stollen etwa zwei Minuten. Und nach zwanzig Millionen Stollen mit knapp sechs Milliarden Rosinen hat man die Lösung.

Hundert Rosinen

Offenbar braucht man minimal 100 Rosinen, aber dass dann auf jedem Stück fünf landen, ist wirklich äußerst unwahrscheinlich, denn die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{\frac{100!}{(5!)^{20}}}{20^{100}} \approx 1.92 \cdot 10^{-14}$$

besagt, dass man 521 Billionen Stollen backen müsste, um einen zu haben, bei dem jedes Stück fünf Rosinen enthält.

Preisträgerlösung

Zwei elegante Argumente vereinfachen das Problem wesentlich:

- Ist die Anzahl der Rosinen wesentlich größer als die Minimalzahl, können die Stollenstücke als unabhängig angesehen werden und die Anzahl der Rosinen in einem Stück X genügt dann einer Binomialverteilung mit $p = \frac{1}{20}$ und gesuchtem n. Und es gilt

  $$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

  für ein Stück und bei 20 Stücken ist diese Wahrscheinlichkeit hoch 20 zu rechnen.

- Weil $P(X \geq 5)$ relativ hoch sein soll, liegt $P(X \leq 4)$ nahe an der 0 und allgemein gilt für kleine x die Näherung

  $$(1-x)^{20} \approx 1 - 20x$$

  also so etwas wie ein Pseudo-Dreisatz nach dem Motto: die Wahrscheinlichkeit für zwanzig Stücke ist gleich der für ein Stück mal 20. Der strenge Beweis erfordert aber größere Geschütze wie den Binomischen Satz oder die Taylor-Entwicklung.

Zusammenfassend schreibt man dann nur noch hin:

$$\begin{aligned} 0.99 &\leq P(X \geq 5)^{20} \\ &= (1 - P(X \leq 4))^{20} \\ &\approx 1 - 20 \cdot P(X \leq 4) \\ \text{Umstellen } \Rightarrow P(X \leq 4) &\leq \frac{0.01}{20} = 0.005 \end{aligned}$$

Und $P(X \leq 4)$ kann man für jedes n mit einem Binomialverteilungsrechner ausrechnen und man findet bei 308 Rosinen $P(X \leq 4) \approx 0.005057$, bei 309 Rosinen $P(X \leq 4) \approx 0.004862$.